

Exercice 1**Oraux ; Série N°7**

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$. 2. Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$. 3. Sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 2

1. Nature de $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Limite, puis équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 [MINES PSI 2023] Soit E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et F un sev de E stable par u .

1. Montrer que $\dim u(F) < \dim F$. 2. On suppose que $F + \text{Im } u = E$. Montrer que $F = E$.

Exercice 4 [CENTRALE 2023] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = \tilde{0}$.

1. Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I , alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I .
2. On pose $\Gamma = \{x \in I \mid f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
3. Les mêmes méthodes permettent de montrer que $\Gamma = \emptyset$ ou $\Gamma = \mathbb{R}$. En déduire f .

Exercice 5 [MINES 2023] 1. Si f, g sont $\mathcal{C}^0$ positives et $f(t) = o_{+\infty}(g(t))$ et $\int_0^x f(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\int_0^x f(t) dt = o_{+\infty} \left(\int_0^x g(t) dt\right)$.

2. Donner un équivalent, quand $x \rightarrow +\infty$, de $\int_1^x t^t dt$.

Exercice 6 [MINES MP] Soit $P = a_0 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que si $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment proche de $(a_0, \dots, a_{n-1})$, le polynôme $Q = b_0 + \dots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$ est s.à.r.s.

Exercice 7 [X MP 2023] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re } s > 1$.

1. Montrer que la famille $(|F|^{-s})$, indexée par les $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
2. On note A l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-à-dire tels que $\forall D \in \mathbb{F}_p[X], D^2|F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrer que $\sum_{F \in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
3. En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 8 [X 2022] Soit X_n suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n et $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$. Montrer que $P(Y_n \geq 1/2) \rightarrow 2 \ln 2 - 1$.

Exercice 9 [ENS 2023] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G , on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G . **Ind** : Les questions sont indépendantes.

1. On supp. que $|XX| < 2|X|$. Mq $XX^{-1} = X^{-1}X$. 2. On supp. que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Mq $X^{-1}X$ est un sg de G .

Exercice 1**Oraux ; Série N°7**

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$. 2. Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$. 3. Sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 2

1. Nature de $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Limite, puis équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 [MINES PSI 2023] Soit E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et F un sev de E stable par u .

1. Montrer que $\dim u(F) < \dim F$. 2. On suppose que $F + \text{Im } u = E$. Montrer que $F = E$.

Exercice 4 [CENTRALE 2023] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = \tilde{0}$.

1. Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I , alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I .
2. On pose $\Gamma = \{x \in I \mid f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
3. Les mêmes méthodes permettent de montrer que $\Gamma = \emptyset$ ou $\Gamma = \mathbb{R}$. En déduire f .

Exercice 5 [MINES 2023] 1. Si f, g sont $\mathcal{C}^0$ positives et $f(t) = o_{+\infty}(g(t))$ et $\int_0^x f(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\int_0^x f(t) dt = o_{+\infty} \left(\int_0^x g(t) dt\right)$.

2. Donner un équivalent, quand $x \rightarrow +\infty$, de $\int_1^x t^t dt$.

Exercice 6 [MINES MP] Soit $P = a_0 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que si $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment proche de $(a_0, \dots, a_{n-1})$, le polynôme $Q = b_0 + \dots + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$ est s.à.r.s.

Exercice 7 [X MP 2023] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re } s > 1$.

1. Montrer que la famille $(|F|^{-s})$, indexée par les $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
2. On note A l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-à-dire tels que $\forall D \in \mathbb{F}_p[X], D^2|F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrer que $\sum_{F \in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
3. En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 8 [X 2022] Soit X_n suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n et $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$. Montrer que $P(Y_n \geq 1/2) \rightarrow 2 \ln 2 - 1$.

Exercice 9 [ENS 2023] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G , on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G . **Ind** : Les questions sont indépendantes.

1. On supp. que $|XX| < 2|X|$. Mq $XX^{-1} = X^{-1}X$. 2. On supp. que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Mq $X^{-1}X$ est un sg de G .